¿Qué significa multiplicar por 7/4?

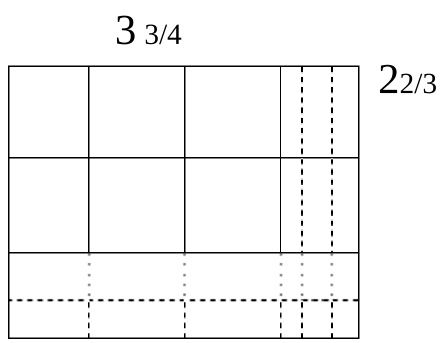
Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros.

Hugo Balbuena/ David Block

Como parte del programa “Metodología del Trabajo Intelectual”, que corresponde al segundo semestre del plan de estudios de la licenciatura en educación indígena que se ofrece en la Universidad Pedagógica Nacional, hemos incluido el planteamiento de algunas situaciones didácticas sobre temas de Matemáticas. Las situaciones son resueltas por los estudiantes y posteriormente se hace un análisis de ellas en la misma clase. En primer lugar se analizan los procedimientos usados y las dificultades que se encontraron, y en segundo lugar las ventajas y limitaciones didácticas que tendrían las situaciones si fueran planteadas a los alumnos del nivel básico. Por lo general, después de haber trabajado para resolver un problema, los estudiantes maestros manifiestan espontáneamente sus puntos de vista en relación con lo que podrían hacer sus propios alumnos si les propusieran un trabajo similar al que ellos han realizado.

El aspecto que abordamos en este artículo se refiere a una experiencia con los estudiantes sobre la multiplicación por una fracción.

Sabemos que la interpretación más socorrida de la multiplicación es la del área de un rectángulo cuyos lados tienen una medida fraccionaria.



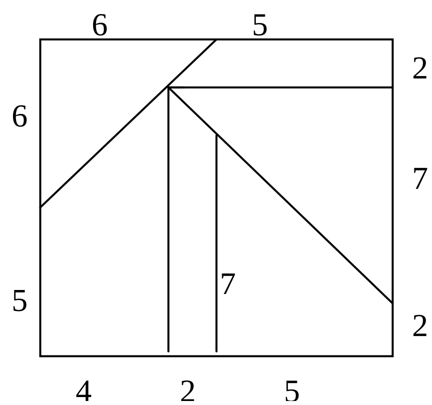
$$(3+3/4)x(2+2/3)= 3x2+ 3x2/3+ 2x3/4+3/4x2/30=$$
$$=6 + 2 + 6/4 + 6/12= 8+2= 10$$
o bien $$= 15/4x8/3= 120/42 = 10$$

Esta interpretación, aunque permite ver con claridad y facilidad cómo se obtiene el resultado de la multiplicación de fracciones, es muy limitada en el sentido de que sólo da significado a la multiplicación en este problema muy específico: el cálculo del área de un rectángulo.

Hay un campo de problemas mucho más amplio en el que interviene la multiplicación por una fracción: lo constituyen los problemas de proporcionalidad en los que la fracción juega el papel de un operador multiplicativo (Brousseau, G. 1981; Kieren, T. 1976; Freudenthal, 1983).

El problema que se planteó a los estudiantes consiste en construir un rompecabezas semejante a otro pero más grande. Forma parte de una secuencia de situaciones didácticas diseñadas para el aprendizaje de los números racionales por Nadine y Guy Brousseau (1987).

Antes de proponer la situación, el maestro organizó al grupo en tres equipos de cinco a seis estudiantes, entregó a cada equipo una hoja en la que aparece; en tamaño real, un rompecabezas como el que se ve abajo.



Les entregó además reglas graduadas, tijeras y seis mitades de hoja tamaño carta. Enseguida les dio la siguiente consigna:

El dibujo que aparece en la hoja es un rompecabezas, se trata de que ustedes hagan un rompecabezas semejante al que está en la hoja pero más grande, de manera que la parte que mide 4, deberá medir 7 en el rompecabezas que ustedes harán. Primero pónganse de acuerdo en el procedimiento que van a usar y luego se reparten las piezas para que cada quien haga una o dos.

Al elegir esta situación teníamos la expectativa de que los estudiantes utilizarían, entre otros recursos, a la fracción como operador multiplicativo, al encontrar que multiplicando por 7/4 cada una de las medidas originales, se obtienen las nuevas medidas del rompecabezas. Las nuevas medidas guardan una relación proporcional con las medidas originales y el factor que hace pasar directamente de una a la otra es 7/4: 4x 7/4 = 7.

Antes de describir lo que hicieron los estudiantes para resolver la situación, destaquemos una cualidad importante de la misma: la situación permite validar los procedimientos utilizados por los alumnos: ellos pueden saber si sus procedimientos so correctos o incorrectos, por que al final ven si las nuevas piezas embonan o no para formar el nuevo rompecabezas. Esta cualidad marca una diferencia importante con otras situaciones en las que los estudiantes llegan a un resultado sin saber si es correcto o incorrecto. La validación en esos casos depende de la discusión entre los propios alumnos o incluso de la intervención del maestro.

Pasemos a los procedimientos de los alumnos. No sucedió lo que esperábamos. Los tres equipos lograron construir el nuevo rompecabezas pero a través de otros recursos que veremos a continuación.

Equipo 1: El primer intento para resolver el problema fue el uso de una estrategia aditiva. Todos los miembros del equipo estuvieron de acuerdo en sumar tres centímetros a cada una de las medidas originales, pero en cuanto hicieron las primeras piezas, uno de los integrantes dijo:

…pero…¿sabes qué?, no va a checar, se deforma demasiado; como que no va a salir.

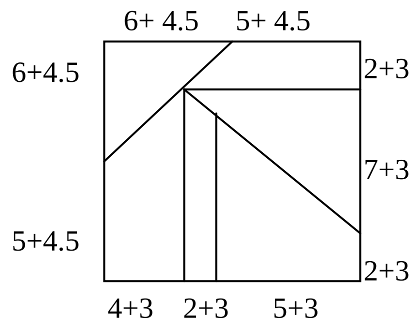
Probaron con las dos piezas que ya habían construido y se dieron cuenta que no embonaban. El mismo estudiante comentó nuevamente:

Nos fuimos con la finta de que como ésta aumentó tres, (se refiere a la longitud que mide 4 cm.), *a todas les teníamos que aumentar tres.*

El maestro preguntó: *¿Y ahora cómo piensan hacerle?*

Vamos a checar para ver sí están bien las medidas.

El segundo intento consistió en igualar las medidas de los lados que forman el cuadrado, pero conservando la estrategia aditiva: sabiendo que una de las medidas aumentó 3 cm, aumentaron lo mismo a las otras dos medidas en ese mismo lado y obtuvieron 20 cm. Entonces igualaron a 20 cm los 4 lados del cuadrado procurando conservar una regularidad: las medidas de dos lados aumentan siempre 3 cm mientras que las de los otros dos se incrementan en 4.5 cm.



Finalmente optaron por la idea de la proporcionalidad al establecer la siguiente relación: de 4 aumentó a 7, entonces de 2 aumenta a 3.5, es decir, que por cada 2 cm. se aumenta 1.5cm.

Así, descompusieron las medidas originales en "doses" y de esa manera calcularon las respectivas imágenes. Por ejemplo, para encontrar la imagen de 9 hicieron lo siguiente:

2 2 2 2 1

3 3 + .75 9+6.75= 15.75

6 + .75= 6.75

Posteriormente organizaron las medidas originales con sus respectivas imágenes, todavía con algunos errores de cálculo, que lograron corregir al notar que la pieza no embonaba bien en el rompecabezas.

4 cm	=	7
2	=	3.5
5	=	8.75
7	=	12.25
6	=	10.5
9	=	13.75

Equipo2: Los integrantes de este equipo se dieron cuenta desde un principio de la relación proporcional entre las medidas del rompecabezas original y el que iban a reproducir. Partiendo de esta premisa se propusieron encontrar el incremento de cada medida y lo consiguieron de dos maneras diferentes cuyas explicaciones son las siguientes:

1. *De 4 cm a 7 cm hubo un aumento de 3 cm. O sea que el 4 aumentó en un 75%, porque 3 es el 75% de 4, entonces a todas las medidas las aumentamos en el mismo porcentaje.*

4 + 75% de 4 = 7
2 + 75% de 2 = 3.5

Para encontrar este porcentaje, 75%, utilizaron la regla de tres:

4 - - - - - 100
3 - - - - - x

Por lo tanto, x = (3x100): 4 = 75

2. *Si al 4 le aumentamos 3, por lógica al 2 le aumentaríamos 1.5 y sacamos lo de un centímetro.* (En la hoja de trabajo tienen anotado lo siguiente):

2 =
4 = 7
5 = 3.75
6 = 4 ½
7 = 5.25
9 = 6.75
¾

Equipo 3: En este equipo, igual que en el anterior, imaginaron desde el principio la relación proporcional entre las longitudes originales y las del nuevo rompecabezas.

En su hoja de trabajo escribieron lo siguiente:

4 - - - 3	" al 4 le damos 3"
2 - - - 1 ½	" al 2 le damos 1 ½"
6 - - - 4 ½	"al 6, 4 ½"
5 - - - 3.75	
7 - - - 5.25	
9 - - - 6.75	

Para organizar los datos como se ve arriba, encontraron, mediante el recurso de sacar mitades, que por cada centímetro se debía agregar 75 mm. Posteriormente observaron que 75mm es igual a ¾ de 1 cm y dijeron que por cada centímetro debían aumentar ¾.

Durante la confrontación uno de los integrantes de este equipo explicó lo siguiente: *A cada cantidad debemos aumentarle ¾ de ella misma, ¾ x 4 = 12/4 = 3, este 3 debe ser la cantidad que había que aumentarle a 4, por lo tanto 4 + 3 será la dimensión del nuevo cuadrado.*

Retomando la explicación anterior, el profesor hizo notar la relación que está tiene con la idea del porcentaje que utilizaron en el equipo dos.

2 + 75/100 x 2 = 2 + ¾ x 2

Posteriormente para explicitar aún más uno de los procedimientos que se usaron para encontrar el incremento de cada una de las medidas originales, el profesor escribe en el pizarrón la siguiente lista.

2 X ¾ =	6 X ¾=
4 X ¾ =	7 X ¾ =
5 X ¾ =	9 X ¾ =

A un lado de la lista anterior, el profesor anota lo siguiente:

2X ?	= 3.5	6X ?	= 10.5
4X	= 7	7X	= 12.25
5X	=8.75	9X	= 15.75

Les dice que hay un factor que hace pasar directamente de la medida original a la medida incrementada y les propone que traten de encontrarlo. Uno de los estudiantes pregunta: *¿Los factores deben ser iguales o distintos?* El profesor simplemente devuelve la pregunta diciendo que ellos mismos determinen si son iguales o distintos. Las opiniones se dividen, algunos opinan que deben ser distintos factores y otros que debe ser el mismo. Otros incluso dudan de que pueda existir ese factor.

Después de algunos minutos de búsqueda uno de los estudiantes encuentra, por ensayo, el 1.75, lo multiplica por todas las medidas originales y comprueba que sí se obtienen las medidas del nuevo rompecabezas.

El profesor pregunta que si habría una manera directa de encontrar ese número, agrega que también se puede escribir como 7/4.

Algunos tratan de darle sentido a 7/4 mediante la suma de 4/4 + ¾ = 7/4 pero no encuentran el sentido de esa relación y tampoco se discute.

Finalmente, el profesor hace notar que las relaciones de arriba son multiplicaciones incompletas en las que se conoce un factor y el resultado, por lo que el otro factor, que es 7/4 se puede encontrar directamente dividiendo el producto entre el factor que se conoce. No se pone mayor énfasis en el hecho de que el resultado de dividir 7 entre 4 es igual a 7/4.

Fueron las dificultades con las que nos enfrentamos al aplicar esta situación, las que motivaron las reflexiones y preguntas que planteamos a continuación.

Reflexiones y preguntas.

El operador X 7/4 no aparece. Si bien los procedimientos muestran una riqueza de formas para abordar un problema de crecimiento proporcional, salta a la vista que ningún equipo logró, ni al principio, ni al final, construir o identificar al operador X 7/4 que asocia a cada medida de la figura original, su imagen en la figura ampliada.

Es decir, para los alumnos no existe un número que multiplicado por 4 dé como resultado 7 y por está razón, no sienten necesidad de buscarlo. Esto se hizo más evidente aún al final de la sesión, cuando los alumnos ya han resuelto el problema y el profesor pone las distintas medidas, las originales y las transformadas, y plantea que encuentren un número que multiplicado por las medidas originales, dé las otras medidas. Los alumnos muestran no tener ninguna seguridad, incluso uno de ellos pregunta *¿tiene que ser el mismo número?*

No creemos que el origen de esta ausencia esté en la noción de proporcionalidad, ni en la de operador multiplicativo en general, dado que los alumnos sí identifican al operador cuando éste es entero. En una situación en la que una medida crece al triple, el operador es X 3, los alumnos saben que todas las medidas deben multiplicarse por 3.

Lo que se expresó aquí, en nuestra opinión, es la ausencia de significado de la multiplicación por una fracción, ausencia parcial en algunos alumnos y total en otros.

Parece que la multiplicación, como operación, sigue estrechamente vinculada a la idea de número entero de veces más grande, y detrás de este sentido, al de suma iterada. Es el sentido que la multiplicación tiene en los números naturales, por lo tanto, 7 no es cierto número de veces más grande que 4, sí en cambio 8, que es 2 veces más grande que 4, o incluso 2, que es 2 veces más chico que 4.

Los procedimientos que produjeron los alumnos, por cierto creativos y acertados, pueden verse como la producción de alternativas que evitan justamente esta laguna. Veámoslos a la luz de esta hipótesis:

En el equipo 1, al no encontrar un operador multiplicativo entero para pasar de 4 a 7, regresan a la estrategia aditiva: sumar 3. La deformación que se produce en las piezas del rompecabezas los hace recapacitar nuevamente.

Los tres equipos terminan resolviendo el problema centrándose en lo que hay que *aumentar* a las medidas originales para obtener las imágenes. Todos logran considerar que ese aumento es proporcional: en un equipo proponen aumentar 1.5 cm a cada 2 cm, en otro el 75 % de cada medida y en otro 75 mm por cada centímetro. Lo que llama la atención es justamente que se centre en cuánto hay que aumentar, y no en por cuánto hay que multiplicar la medida original para obtener directamente la imagen.

La idea de manejar el incremento parece estar cercana a la estrategia aditiva, en la que se aumenta una cantidad fija, sólo que, a diferencia de ésta, aquí los alumnos sí consideran la proporcionalidad en juego.

L + incremento = L’ en vez de L X factor = L’

Para encontrar los incrementos correspondientes a cada medida, el equipo 1 y el equipo 3, en su primer acercamiento al problema, se las arreglan para manejar operadores enteros y no el operador fraccionario:

Medida original → Incremento

4 cm - ——— ? ——→ 3 cm

-:-2 -:-2

2 cm 1.5 cm

-:-2 -:-2

1 cm 0.75 cm

Es decir, manejan las relaciones verticales (internas) de la situación proporcional: de 4 a 2 es la mitad, y entonces la imagen de 2 es la mitad de 3, y no la relación en sentido horizontal (externas): la relación de 4 a 3 debe ser la misma que de 2 a X, el número por el que hay que multiplicar al 2 para obtener su imagen, es el número que multiplicado por 4 da 3, pero, ¿existe ese número?

En el equipo 2 aparece un operador fraccionario para calcular el valor de cada incremento, pero aparece escondido en un porcentaje: 75 % Siguiendo un razonamiento preciso, los alumnos saben que el incremento debe ser proporcional a cada medida. Esto los lleva a pensar en el porcentaje que es el instrumento relacionado con la proporcionalidad con el que más familiaridad tenemos, por ser el que más se usa en la vida cotidiana.

Estos alumnos saben pues, que cada incremento es igual a un porcentaje fijo de cada medida, y disponen de un algoritmo para obtener ese porcentaje. Bien, pero nuestro operador fraccionario perdió otra oportunidad de explicitarse.

Finalmente, en el equipo 3, en el momento de la confrontación, un alumno saca a la luz un operador multiplicativo fraccionario para calcular los incrementos: *a cada cantidad debemos aumentarle tres cuartos de ella misma, ¾ X4 = 12/4 = 3*…No les fue fácil llegar a él. Primero hicieron sus tablas relacionando cada medida (L) con su incremento (I), y utilizando un operador entero:

L **?** **I**

4 ——→ 3

÷2 ÷2

2 1.5

÷2 ÷2

1 .75

Observan que por cada centímetro deben aumentar 75 mm, y que éstos representan ¾ de un centímetro. Después, probablemente razonan así: si a 1 cm se le aumentan ¾ de él mismo, como a todas las medidas hay que aumentarles en la misma proporción, entonces a L se le aumenta ¾ de L.

No obstante, cuando al final de la sesión el profesor intenta que los alumnos encuentren el operador que lleva directamente de las medidas originales a las transformadas, aún los miembros de este equipo dudan que dicho operador exista. ¿Qué diferencia hay entre el operador que ellos sí encontraron y el que el maestro quiere que encuentren? Algunas diferencias significativas pueden ser: encontraron este operador a partir de la relación 1- - - ¾ mientras que en los valores que el maestro presentó al final no aparece la imagen de uno.

Además, el operador X 7/4 tiene la función de pasar directamente de una medida a otra, agrandando. El ¾ en cambio no fue concebido desde la función agrandar-achicar directamente. Fue construido y usado como un medio para expresar la relación entre una medida y lo que se le aumenta (centramiento en el incremento) y como el operador que proporciona los aumentos, los cuales a su vez tendrán que sumarse a cada una de las medidas originales.

¿Qué es necesario para qué los alumnos construyan el significado de X 7/4 como un operador multiplicativo?

La situación del rompecabezas tiene una cualidad muy importante: enfrenta a los alumnos a un hecho empírico observable por ellos que se resiste a sus hipótesis iniciales: un 4 se transformó en un 7. La situación misma les hace ver que la transformación no fue aditiva. Se genera un vacío creado precisamente por la ausencia de la noción X 7/4. La evidencia empírica aunada a la ausencia de una solución conceptual, ¿podría en este caso particular propiciar la construcción de este concepto? Esto es, planteando más situaciones similares, ¿podrían los alumnos llegar a construir el operador X 7/4?

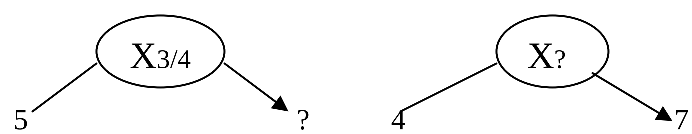
No lo sabemos. Lo que sí sabemos es que, si bien puede decirse que a pesar de su fuerza la situación "flaquea" al dejarse resolver por otras vías, a la vez, como acabamos de ver, propicia la generación de soluciones que indican posibles caminos hacia la noción que nos interesa. Es decir, las condiciones especiales en las que algunos alumnos lograron identificar al operador X ¾, posiblemente son parte de un proceso que los llevará a construir el operador X 7/4.

No obstante, nos preguntamos si otras experiencias y otros conocimientos previos al planteamiento de situaciones como la del rompecabezas podrían ser necesarios para facilitar el paso de la noción *3 veces más grande a la noción 7/4 veces más grande*.

Distingamos dos casos:

Caso (a): cómo dar significado a situaciones en las que se aplica un operador multiplicativo.

Caso (b): situaciones en las que hay que encontrar dicho operador.



(a) (b)

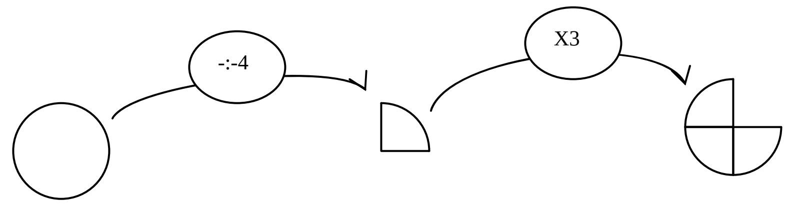
Para el primer caso una primera y sugestiva respuesta podría ser invertir los factores: 5[X ¾] = ¾ [X5]. De esta manera se evita el problema. El operador ahora es un entero, X5, lo que permite interpretar la situación con el sentido bien adquirido de multiplicación, el de suma iterada:

¾ [X5] = ¾ + ¾ + ¾ + ¾ +3/4 = 15/4

Esta solución sin embargo, no resuelve el problema de dar significado al operador X3/4 y es además débil por dejar de funcionar cuando el otro factor también es una fracción:

2/3 X 3/4

Desde las primeras lecciones de fracciones en primaria, la fracción juega implícitamente el papel de operador: cuando los alumnos colorean ¾ de un pastel, están, implícitamente, transformando una cantidad de pastel en otra, pro la vía de aplicar la composición de operador (÷4) (X3) (González, J. L. 1985).



Cuando aplican una fracción a un conjunto discreto, por ejemplo, ¾ de 60 canicas, esta composición de operadores se hace un poco más explícita:
¾ de 60 = (60 +4) X3 = 15 X3 = 45 canicas.

Destaquemos de esto varios hechos: uno, que en estas situaciones la multiplicación por una fracción está implícitamente definida como la transformación resultante de dos transformaciones con números enteros:

X ¾ significa (X3) (÷4) ó (÷4 X 3)

Z.P. Dienes (1972), por ejemplo, decide definir de entrada a la multiplicación de esta manera. No deja de ser sugestivo: aplicar los operadores (X n), (+m) luego composiciones de 2 operadores y finalmente *definir* la composición (Xn) (÷m) como (X n/m).

No obstante, sin definir necesariamente de entrada la multiplicación como lo hace Dienes, no deja de parecer interesante, cuando los alumnos determinan una fracción de una cantidad (3/4 de pastel, 7/4 de 60…) el propiciar en algún momento la explicitación de que están poniendo en juego la composición de las operaciones dividir-multiplicar.

Imaginemos situaciones de escala en las que los alumnos agrandan o achican figuras con los operadores (X n) ó (m) (enteros). Pueden producir agrandamientos o achicamientos del doble, el triple, el cuádruple, etc. La aplicación de operadores fraccionarios como "5/3 de", ya interpretados como la composición (3) (X5), les permitiría producir agrandamientos y achicamientos "intermedios" como los que de hecho puede producir una fotocopiadora, un retroproyector, o una cámara fotográfica.

Un riesgo sin embargo, derivado de la insistencia en traducir X n/m en (m) (X n), es dificultar el proceso de por sí arduo de concebir a la fracción como un número y no como dos números naturales aislados.

Destaquemos otro hecho: los alumnos pueden aprender sin mucha dificultad a extraer o determinar cantidades como ¾ de pastel o ¾ de 60 canicas. Suponemos que pueden incluso explicitar las dos operaciones implicadas en esas acciones. Pero no hay ningún motivo para que los alumnos, de entrada, identifiquen la operación "3/4 de" como una multiplicación.

¿En qué se parece esta composición de operadores a su noción de multiplicación que siempre agranda un número entero de veces?

H. Freudenthal (1983), acertadamente nos hace notar esta dificultad en las formas mismas con las que nos expresamos: decimos, por ejemplo, 3 veces, 4 veces, 8 veces, pero no decimos 3/2 veces, 7/4 veces.

Las fracciones, en su papel de operador multiplicativo, casi siempre están seguidas del término *de*: "3/4 *de* pastel, 7/4 *de* la longitud, 2/3 *de* la población", y casi siempre con una connotación "extractiva".

El problema, bien indicado por Freudhental, es entonces: ¿Cómo pasar del "*de*" al "*veces*"? El propone, entre otras cosas, el uso de números mixtos en situaciones en las que éstos funcionen como operadores multiplicativos: dos y media veces, tres y dos quintos veces… para destacar así un aspecto común a los enteros y a las fracciones: su papel como operadores multiplicativos.

Consideramos que la propuesta es buena, aunque por sí sola difícilmente propiciaría la necesaria reconceptualización de la noción de multiplicación. Digámoslo más directamente:

pareciera que los alumnos construyen en paralelo dos nociones: la de multiplicación, asociada a los enteros y la expresión *"n veces*", y otra operación sin nombre, asociada a las fracciones y a la expresión *'n/m de'*. El que se diga a los alumnos que *'n/m de´* es, por definición, *'n/m por'*, puede no ser más que una arbitrariedad que *no* produzca, al menos en el corto plazo, una reconceptualización de la multiplicación. Se estarían designando con el mismo símbolo dos operaciones que, por lo menos durante un tiempo, son diferentes. No sabemos tampoco si esta homonimia sea un factor de aprendizaje.

Lo interesante es que, sin necesidad de asociar la operación *'n/m de'* a la multiplicación, los alumnos pueden dar un amplio uso y en consecuencia un amplio significado a la operación *'n/m de'*.

De hecho, algunos se lo dan. En la experiencia descrita anteriormente, un alumno del equipo tres termina afirmando que a cada medida hay que aumentarle ¾ de ella misma. La fracción permite determinar una relación fija entre la parte y el todo, es decir, una razón, en un contexto de proporcionalidad.

Los niños también lo hacen un poco y lo podrían hacer mucho más. Frente a una expresión como "cada uno va a dar la mitad de las canicas que tenga" o bien, "te vendo todo a la mitad de lo que me costó", entienden perfectamente que las cantidades absolutas, el número de canicas que cada niño da, por ejemplo, varía, pero que todos los niños dan en función de lo que tienen, todos dan la misma parte de lo que tienen. Es decir, dan proporcionalmente a lo que tienen.

Es posible y deseable entonces, enriquecer la expresión *'n/m de'* en tanto razón y en tanto operador, en situaciones de proporcionalidad. Este es, además, el caso general del muy utilizado porcentaje. Freudenthal propone también explorar otras situaciones como el "diezmar": uno de cada diez y en general, el *'n* de cada *m'*.

Además, con el operador *'n/m de'* se pueden hacer composiciones de dos o más operaciones, por ejemplo:

"Me dieron ¾ del pastel, regalo la mitad, ¿qué fracción del pastel completo regalé?"

Es decir, se trata de encontrar el operador compuesto equivalente a ½ de ¾ de uno.

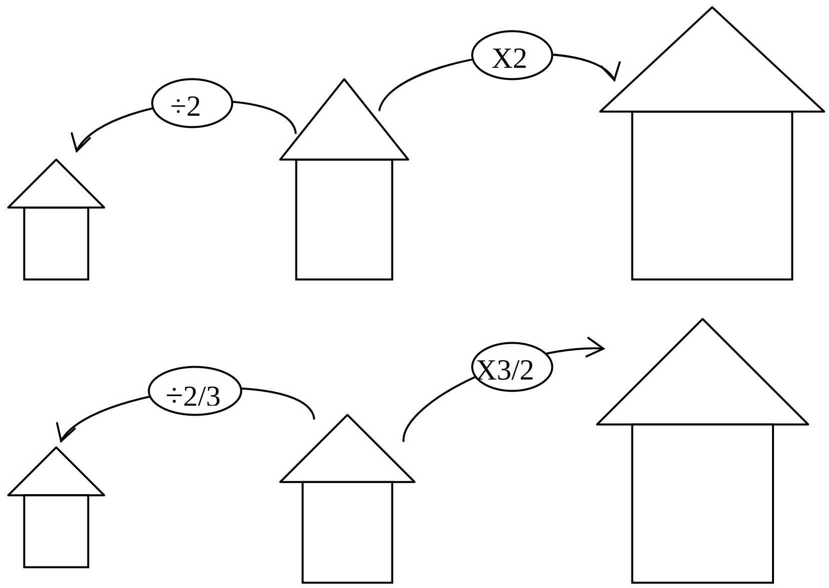
Los alumnos pueden descubrir poco a poco que:

'n/m de p/q' equivale a 'n X p / m X q de',

sin que esto implique aún que esta composición sea para ellos una multiplicación.

De lo anterior se desprenden dos decisiones posibles. Una es no pretender asociar prematuramente el operador *'n/m de'* con la multiplicación. Esperar a que los alumnos accedan a un nivel de reflexión más abstracto que les permita identificar a la multiplicación de enteros como un caso particular de la multiplicación de fracciones. Esto sin duda no es una tarea realizable en la primaria, y habría que ver si lo es en secundaria. Una decisión como está estaría de acuerdo en gran medida con el enfoque de enseñanza "realística" de la matemática, propuesto por la escuela holandesa de investigación en didáctica (Gravemeijer, K, 1990).

La otra decisión es intentar propiciar que esta identificación se dé antes y en un nivel más concreto. En este caso consideramos que deben multiplicarse las situaciones en las que los operadores (*X n*) y (÷*m*) por un lado y *('n/m de'*) por el otro, tienden a comportarse de manera similar. Alternar dichos operadores, destacando que, finalmente, los tres "achican" y "agrandan", pero que el operador *'n/m de'* produce transformaciones "intermedias" que los otros no pueden producir. Además, el operador *'n/m de'* puede producir todas las transformaciones que producen los operadores (*X n*) ó (÷*m*).



En este caso convendría recuperar las sugerencias de Freudenthal acerca de los operadores mixtos. Está implicado también, por su puesto, un intenso trabajo previo, sobre proporcionalidad y semejanza.

El caso (b):

$$4 \xleftarrow{\quad X\,? \quad} \; \xrightarrow{\quad} 7$$

¿Qué se necesita para poder saber que el operador implicado es 7/4?

Primero saber que puede existir, lo que quizás supone experiencias previas aplicando operadores multiplicativos fraccionarios.

Aún viendo una ampliación en la que una medida pasó de 4 a 7, es posible dudar de que exista un factor que transforme el 4 en 7. Esto nos mostró la experiencia aquí reseñada. Una vía posible para encontrar el operador en juego, es a partir de la definición de (X *n/m*) como (÷*m*) (X *n*).

Los alumnos podrían pensar entonces en construir el operador buscando a partir de dos operadores. Uno que transforma al 4 en 1, (4) y otro que transforma al 1 en 7, (X7). Por definición, el operador compuesto sería (X7/4).

Otra vía es pensar en la división. Buscando el número que multiplicado por 4 da 7 no es otra cosa que dividir 7 entre 4. Enseguida, se abren dos caminos: uno consiste en dividir 7 entre 4 aplicando el muy enseñado algoritmo de la división. Se obtiene 1.75 y se aplica como operador multiplicativo para obtener las demás medidas.

Creemos que no es muy difícil que esto suceda dada la destreza que los alumnos adquieren en las mecanizaciones con decimales y la tendencia a abordar con ellas los problemas que implican a las fracciones.

Si bien en esta experiencia no sucedió, podría suceder si se manejan cantidades que inviten más a dividir, por ejemplo

$$14X \_\_\_\_\_ = 136$$

El que los alumnos llegaran a utilizar este operador decimal sería ya un paso importante, pero hay que tener cautela: las destrezas adquiridas en la operatoria con decimales suelen ser tan grandes como la incomprensión de su significado. Para muestra baste un botón: a un alumno de la Universidad después de que resolvió el problema de repartir 7 pasteles entre 4 niños por la vía de la división, encontrando que a cada niño le tocan 1.75 de pastel, se le preguntó que cuánto pastel era eso y contestó: "*Un pastel más un séptimo de pastel más un quinto de pastel*".

El otro camino para encontrar el resultado de la división 7 entre 4 es, simplemente decir 7/4. Camino arduo, dado que a la dificultad de ver a la fracción como operador multiplicativo, se agrega la dificultad de concebirla como cociente de dos enteros.

Sabemos que la concepción de la fracción como cociente está tanto o más ausente que la de operador multiplicativo. La fracción 7/4 como cualquier otra está asociada a la idea de *una* cosa que se parte en 4 y de la que se toman 7 pedazos.

En este caso particular ya es necesario partir dos cosas y este solo hecho es causa de problemas. Pero la fracción 7/4 no es concebida como 7 cosas que se dividen entre 4. La concepción de cociente suele estar ausente a pesar de que en ciertos algoritmos se le utiliza implícitamente, por ejemplo, para pasar de una fracción a expresión decimal se divide el numerador entre el denominador:

$$\frac{7}{4} \longrightarrow 4\overset{1.75}{\overline{\smash{)}7}} \longrightarrow \frac{7}{4} = 1.75$$

Este camino implica pues concebir a la fracción como cociente. Habría que explorar antes las situaciones didácticas que la propicien (Brousseau, G. 1981; Block, D 1987; Balbuena, H. 1988).

Para terminar: es claro que en estas reflexiones aún poco sistematizadas no proponemos soluciones. Esperamos, en cambio, contribuir un poco a llamar la atención sobre un punto: la 'apuesta' a propiciar en el salón de clases el aprendizaje de una matemática con significado *para* los alumnos, con un significado que se origina en las situaciones en las que los contenidos matemáticos funcionan, en los problemas que resuelven, implica retos didácticos nada desdeñables: ¿qué interpretaciones o significados propiciar y en qué orden? ¿qué situaciones o problemas implican a esas interpretaciones? ¿cómo son los procesos a través de los cuales los alumnos construyen una interpretación?...

Bibliografía.

Balbuena, H. (1988). *Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria*. Tesis de Maestría. Sección de Matemáticas Educativa, CINVESTAV-IPN. México.

Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria*. Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN. México.

Brousseau, G. (1981). "Problèmes en didactique des décimaux". en *Recherches en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Vol. 2.1, France.

Brousseau, N., Brousseau G. (1987). "Rationnels et decimaux dans la scolatiré obligatoire". Document pour les enseignants et pour les formateurs. Université de Bordeaux I. I.R. E. M. de Bordeaux, Francia.

Dienes, Z. P. (1972). "La mathématique vivante 1. Nombres naturales, entiers, rationnels". Claude Bernard, París.

Freudenthal, H. (1983). "Didactical Phenomenology of Mathematical Structures". Reidel, Dordrecht.

González, J. L. (1985). *Análisis de las estrategias de enseñanza de las fracciones en el nivel básico del sistema educativo nacional*. Tesis de maestría, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

Gravemeijer K., et. Al. (1990). "Contexts Free Productions. Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education". Research group for Mathematical Education and Educational Computer Center, State University of Utrecht, Netherlands.

Kieren T. (1976). "On the mathematical cognition and instructional foundations of rational numbers" en: *Number and measurement papers from research workshop*. R. Lesh.